ITPASS　数値計算実習課題 その 1

理学部・地球惑星科学科　高木 瑠美　　joho07

2009 年 12 月 18 日

解答

　万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

質量が m_1 である中心星（位置ベクトル $\mathbf{r_1}$)、質量が m_2 である惑星 (位置ベクトル $\mathbf{r_2}$) のみで構成される惑星系において、惑星の軌道を計算する。考える系において、支配的な力は万有引力のみであるとする。G は万有引力定数。

1.

　万有引力の法則より、
中心星に働く力

$$\mathbf{F_{12}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^3}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})$$

惑星に働く力

$$\mathbf{F_{21}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})$$

となっている。
ここで、相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ を定義する。
この系において、運動方程式は以下のようになる。
中心星の運動方程式

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = \mathbf{F_{12}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

惑星の運動方程式

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = \mathbf{F_{21}} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

(**??**) 式 $\times \frac{1}{m_2}$ − (**??**) 式 $\times \frac{1}{m_1}$ より、

$$\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -G\frac{m_1}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} - G\frac{m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -G\frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ を定義し、惑星に働く力を $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ と置き直す。（中心星に働く力は $-\mathbf{F}(\mathbf{r})$ となる。）
すると、(**??**) 式は、以下のように書ける。

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

(**??**) 式は、質量 μ の 1 つの質点がその位置によって定まる力を受けたときの運動方程式に等しい。
したがって、2 体問題が、換算質量 μ と相対位置 $\mathbf{r}$ を用いれば、1 体問題に帰着されることとなる。
また、$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を使って、惑星の運動方程式と中心星の運動方程式を書き直すと以下のようになる。

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{5}$$

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{6}$$

上式 (**??**) 式と (**??**) 式を足し合わせると、

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \tag{7}$$

これより、$\frac{d^2\mathbf{r_G}}{dt^2} = \frac{m_1 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{m_1+m_2} = \mathbf{0}$ となるから、質量中心（この系での重心）は、等速直線運動することが分かる。

2.

1. の運動方程式を成分に分ける。(**??**) 式について
相対ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ に対して、速度は以下のように定義する。

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)$$

これより、相対ベクトルに対する加速度は、

$$\mathbf{a} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \right)$$

したがって、(**??**) 式は、

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = -G \frac{(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -G \frac{(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} x \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -G \frac{(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} y \end{cases}$$

となる。

以上、ITPASS 数値計算実習課題 その 1 の解答である。