ITPASS 実習レポート 2 課題 1

joho 05 高橋由実子

平成 21 年 8 月 12 日

1

質量 m_1 の中心星に働く力を $\mathbf{F}_{12}$ とすると

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$\mathbf{F}_{12} = m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}$ であるから, 上式は

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{1}$$

とあらわせる． 同様に質量 m_2 の惑星に働く力 $\mathbf{F}_{21}$ は

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{2}$$

(2) 式から (1) 式を引くと

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{Gm_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ より

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

となり，求める数式を得られる．

この式から二つの物体の運動は，相対ベクトルを用いて一つの物体に引力が働いているように記述できる． また，重心ベクトル $\mathbf{r}_G$ を

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$$

とすれば，重心の加速度は

$$\frac{d^2\mathbf{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\frac{m_1\mathbf{r}_1}{m_1+m_2} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$$

と表せる．この右辺の第一項と第二項それぞれに (1) 式と (2) 式を代入すると

$$\frac{d^2\mathbf{r}_G}{dt^2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{Gm_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{Gm_1\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 0$$

となって，重心の加速度が 0 であることがわかる．　よってこの二つの物体は，重心が等速直線運動をするような運動をする．

2

$\frac{dv_x}{dt}$ を与えられた定義より変形して，1 で求めた $\frac{d^2r}{dt^2}$ を代入すればよいので

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x$$

と表せる．同様に y 成分も

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y$$

と表せる．