

# ITPASS 数値計算実習課題 1

瀧本 香織  
情報実験機 joh08

平成 21 年 8 月 19 日

## 1 中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式

運動方程式は、以下の式である。

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F \quad (1)$$

また、このとき、2 天体間に働く力は万有引力のみであるので、

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (2)$$

となる。

中心星の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_1$ 、惑星の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_2$  とすると、中心星の運動方程式は以下のものとなる。

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|r^3|} \mathbf{r} \quad (3)$$

また、惑星の運動方程式は、以下のものとなる。

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|r^3|} \mathbf{r} \quad (4)$$

ここで相対ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  を用い、(3) 式と (4) 式を整理した上で引くと、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (5)$$

という式が導出される。

## 2 成分分解

成分  $x, y$  に分解する。1 (1) の運動方程式に  $\mathbf{r} = (x, y)$  を代入すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \quad (7)$$

このとき、指示によると

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \quad (8)$$

で定義されているので、以下を代入すると

$$\frac{d}{dt}(v_x, v_y) = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \quad (9)$$

となる。ゆえに、

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x \quad , \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y \quad (10)$$

となる。