

# ITPASS 数値計算実習課題その1 二体問題

平成 21 年 8 月 18 日

名前：山本 起大  
情報実験機番号：joho01

## 1 中心星・惑星間の運動方程式

$F$  は 2 つの天体の間に働く万有引力のみを考えるので

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

よって中心星の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (1)$$

であり、  
惑星の運動方程式は

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

となる。  
ここで

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

で  $\mathbf{r}$  は相対ベクトルである。

(2) 式、(1) 式を整理して引くと、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

となり、求めたい式が導出できた。

(3) 式はある 1 つの質点を原点として、中心力のみが働くことを表している。  
相対ベクトルを導入することによって、二体問題を一体問題として考えることができる。

## 2 成分に分解

1 を成分  $x, y$  に分解する。

(3) の運動方程式に  $\mathbf{r} = (x, y)$  を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(x, y) &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)\end{aligned}\quad (4)$$

ここで、与えられた定義  $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (v_x, v_y)$  より、(4) は以下ようになる。

$$\frac{d}{dt}(v_x, v_y) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)\quad (5)$$

最後に、(5) を  $x, y$  にわけて書いて

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y$$

となる。