ITPASS 数値計算実習課題 その 1

河合 佑太　（担当情報実験機 joho10)

2009 年 12 月 18 日

1　問題 1

質量 m_1 である中心星と、質量 m_2 である惑星のみで構成される惑星系を考える。（この系で働く力は、万有引力のみであるとする。）ここで、中心星及び惑星の位置ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{r_1}$,$\boldsymbol{r_2}$ で表されるものとする。

このとき、中心星および惑星に対して成り立つ運動方程式はそれぞれ次のようになる。

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \ , \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2}$$

なお $\boldsymbol{r}$ は、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ によって定義される相対ベクトルである。

よって、(2) 式から (1) 式を引けば次の式が得られる。

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3}$$

(3) 式で表されるような運動は、ある 1 つの質点を原点とした座標系では中心力のみが働く系である。このとき惑星は、1 つの平面上を運動する。また、2 質点の共通重心は慣性系において等速直線運動をする（運動量保存)。なお、このような運動は一般に二体問題として取り扱われる。

2　問題 2

次に 1 の (3) で得られた運動方程式を成分に分ける。加速度は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$$

と表される。ただし、$\boldsymbol{r} = (x, y)$,$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ としている。

よって (3) から、

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1+m_2)x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \ , \tag{4}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1+m_2)y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{5}$$

となる。

3　(3) の厳密解について

問題 2 では、数値計算を行う際に差分方程式をつくるために式 (4)、(5) のような変形を行った。ところで、式（3）で表される微分方程式は解析解を得ることができる。ここでは、式 (3) の解析解を求めることを考える。

式 (3) を極座標 $(r,\ \theta\ )$ で展開すると、($\boldsymbol{r} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とすればよい）

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \tag{7}$$

(7) 式から中心力のみが働く系では、角運動量は保存される（＝面積速度一定）ことがわかる。今、角運動量を $h \equiv r^2\dfrac{d\theta}{dt}$、動径の通過面積を S とすれば面積速度一定であることは以下のように表される。

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{8}$$

次に、r と θ の間に成り立つ微分方程式を求める。$M \equiv m_1 + m_2$ とすれば、式 (6) より、

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{9}$$

となる。

$s = \dfrac{1}{r}$ と置き換えれば、$\dfrac{dr}{dt} = -h\dfrac{ds}{d\theta}, \dfrac{d^2r}{dt^2} = -h\dfrac{d^2s}{d\theta^2}\cdot hs^2$ となるので、式 (9) は次のように整理される。

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} = -s + \frac{GM}{h^2} \tag{10}$$

式 (10) のような形の常微分方程式の一般解は、$s = A\cos(\theta+\alpha) + \dfrac{GM}{h^2}$ と表される。ここで、$\alpha = 0$ としてもここでは一般性を失わないので簡単化する。このとき、式 (10) の解は次のようになる。

$$s = \frac{GM}{h^2} + A\cos\theta \tag{11}$$

s を r で書き換えて、また $e = \dfrac{Ah^2}{GM}, l = \dfrac{h^2}{GM}$ とすれば上式は以下のように表現される。

$$r = \frac{l}{1+e\cos\theta} \tag{12}$$

これは、楕円や放物線を表す（e が離心率に対応する）ので、2 体問題における惑星の軌道は 2 次曲線となることが分かった。