ITPASS レポート課題 1

joho04 山本祐大

2010 年 1 月 22 日

問 1:

惑星について運動方程式を立てると,

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r_2}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{1}$$

ゆえに

$$\frac{d^2 \vec{r_2}}{dt^2} = -G \frac{m_1 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{2}$$

同様に中心星についても,

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r_1}}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{3}$$

ゆえに

$$\frac{d^2 \vec{r_1}}{dt^2} = G \frac{m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{4}$$

(2)-(4) より

$$\frac{d^2 \vec{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r_1}}{dt^2} = -G \frac{m_1 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} - G \frac{m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{5}$$

ゆえに、ベクトル $\vec{r}$ もまとめて,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{(m_1 + m_2) \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{6}$$

この式から二つの物体の運動は,相対ベクトルを用いて一つの物体に引力が働いているように記述できる.

また,重心ベクトル $\vec{r}_G$ を

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

とすれば,重心の加速度は

$$\frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_1 \vec{r_1}}{m_1 + m_2} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2}. \tag{8}$$

と表せる.この右辺の第一項と第二項それぞれに (2) 式と (4) 式を代入すると

$$\frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{G m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{G m_1 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0. \tag{9}$$

となって,重心の加速度が 0 であることがわかる. よってこの二つの物体は,重心が等速直線運動をするような運動をする.

問 2:

$$r = |\overrightarrow{\mathrm{r}}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{10}$$

なので、(6) を用いて

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x. \tag{11}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y. \tag{12}$$

(11)(12) が求める式である。