

ITPASS 数値計算実習課題その 1 (2010 年 6 月 25 日 (金) 出題)

惑星の軌道計算をする準備として、2 体問題に関する簡単な問題を解いてみましょう。解答にあたっては次のことに注意してください。

- 解答は  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  で作成し、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$  のソースファイルと PDF ファイルを提出すること。
- 7 月 9 日 (金) に出題される「課題その 2」と合わせて提出すること。「課題その 2」については 7 月 9 日 (金) に詳細を告知する。
- 提出期限は、「課題その 2」と合わせて 7 月 15 日 (木) の 24 時とする。
- 提出方法に関しては、「課題その 2」と合わせて 7 月 9 日 (金) に詳細を告知する。

## 問題

### 万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

を用いて、惑星の軌道を計算することを考えてみよう。

簡単のため、考える系における支配的な力は万有引力のみであるとする。いま、質量が  $m_1$  である中心星と、質量が  $m_2$  である惑星のみで構成される惑星系を考える。また中心星及び惑星の位置はベクトル  $r_1, r_2$  で表されるとする。

1. 慣性系において、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式を書け。またそれらから

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r}$$

を導出せよ。ここで  $\mathbf{r}$  は  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  で表される相対ベクトルとする。このとき、上記運動方程式で表される運動がどのようなものかを考えよ。

2. 1. の運動方程式を成分に分けることを考えよう。  
簡単のため、二体は同一平面上を運動しているとする。相対ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y)$  に対して、速度を

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

と定義する。このとき、 $\frac{dv_x}{dt}$  と  $\frac{dv_y}{dt}$  を  $x, y$  を用いて表せ。

### おまけ

以下は発展問題です。提出の必要はありませんが、余力のある人は考えてみると7月9日の数値計算実習で役に立つでしょう。

上記の問題では2体問題を扱いました。これが3体になると運動方程式はどうなるのでしょうか。

中心星の質量を  $m_1$ 、その周りを運動する天体の質量を  $m_2, m_3$ 、位置ベクトルはそれぞれ  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  とし、相対ベクトル

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

を用いて考えてみてください。