

ITPASS レポート 01

佐藤 緩奈

2011 年 7 月 15 日

問題 1

1.

m_1 と m_2 において運動方程式を立てると

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

上式を整理して

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r}$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r}$$

2.

$$(v_x, v_y) = -G \frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y)$$

これより

$$v_x = -G \frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x$$
$$v_y = -G \frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y$$

問題 2

1.

$r=1, \mu_1 + \mu_2 = 1$, 中心星、惑星が x 軸上にあることから重心から中心星までの距離は

$$1 \times \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{\mu_2}{G}}{\frac{\mu_1}{G} + \frac{\mu_2}{G}} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_2$$

重心から惑星までの距離は

$$1 \times \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{\mu_1}{G}}{\frac{\mu_1}{G} + \frac{\mu_2}{G}} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_1$$

よって

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$$

2.

$$\theta = \omega t$$

(ζ, η) を (x, y) に変換する回転行列を \mathbf{R} と置くと

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} \xi = x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t) \\ \eta = x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t) \end{cases}$$

3.

2.2 で求めた ξ と η をそれぞれ 2 階微分する

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \dot{x}\sin(\omega t) + \omega x\cos(\omega t) + \dot{y}\cos(\omega t) - \omega^2 y\sin(\omega t) \\ \ddot{\eta} &= \ddot{x}\sin(\omega t) + \omega\dot{x}\cos(\omega t) + \omega\dot{x}\cos(\omega t) - \omega^2 x\sin(\omega t) \\ &\quad + \ddot{y}\cos(\omega t) - \omega\dot{y}\sin(\omega t) - (\omega\dot{y}\sin(\omega t) + \omega^2 y\cos(\omega t)) \\ &= (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos(\omega t) + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

4.

問題文の $\ddot{\xi}$ と $\ddot{\eta}$ を 2.3 で求めた式に代入する。

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ &= (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 y)\cos(\omega t) - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 x)\sin(\omega t)\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} &= \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\ &= (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 x)\cos(\omega t) - (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 y)\sin(\omega t)\end{aligned}\quad (2)$$

(1) 式に両辺 $\cos(\omega t)$ 、(2) 式に $\sin(\omega t)$ をかけると

$$\begin{aligned}\left(\mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}\right)\cos(\omega t) &= \\ (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos^2(\omega t) - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ \left(\mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}\right)\sin(\omega t) &= \\ (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 x)\cos(\omega t)\sin(\omega t) - (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 y)\sin^2(\omega t)\end{aligned}$$

辺々足し合わせると

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= \mu_1 \frac{\xi_1 \cos(\omega t) - \xi \cos(\omega t) + \eta_1 \sin(\omega t) - \eta \sin(\omega t)}{r_1^3} \\ &= \mu_2 \frac{\xi_2 \cos(\omega t) - \xi \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) - \eta \sin(\omega t)}{r_2^3}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \xi = x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t) \\ \eta = x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \\ &= -\left[\mu_1 \frac{x - x_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - x_2}{r_2^3}\right] \\ &= -\left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right]\end{aligned}$$

(\because 1.1 より $x_1 = -\mu_2$, $x_2 = \mu_1$)

同様に (1) 式に両辺 $\sin(\omega t)$ 、(2) 式に両辺 $\cos(\omega t)$ をかけて

$$\begin{aligned} & \left(\mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \right) \sin(\omega t) = \\ & (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos(\omega t) \sin(\omega t) - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \sin^2(\omega t) \\ & \left(\mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \right) \cos(\omega t) = \\ & (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos^2(\omega t) + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \sin(\omega t) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

これらを整理すると

$$\begin{aligned} \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= \mu_1 \frac{-\xi_1 \sin(\omega t) - \eta_1 \cos(\omega t) + \xi \sin(\omega t) - \eta \sin(\omega t)}{r_1^3} \\ &= \mu_2 \frac{-\xi_2 \sin(\omega t) + \eta_2 \cos(\omega t) + \xi \sin(\omega t) - \eta \cos(\omega t)}{r_2^3} \\ &= \mu_1 \frac{y_1 - y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y_2 - y}{r_2^3} \\ &= - \left[\mu_1 \frac{-y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{-y}{r_2^3} \right] \\ &= - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \end{aligned}$$

(\because 2.1 より $y_1 = 0$, $y_2 = 0$) よって導出できた。

5.

$P(x, y)$, $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$, $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$ より三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2} \\ \frac{\mu_1}{r_1} &= \frac{\mu_1}{((x + \mu_2)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$\frac{\mu_1}{r_1}$ を x で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_1}{r_1} &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_1(2x + 2\mu_2)}{\{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\mu_1 \frac{(x + \mu_2)}{r_1^3} \end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\mu_2}{r_2} = \frac{\mu_2}{((\mu_1 - x)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{\mu_2}{r_2}$ を x で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_2(2x - 2\mu_1)}{\{(\mu_1 - x)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\mu_2 \frac{(x - \mu_1)}{r_2^3} \\ U &= \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) \\ &= \omega^2 x - \left[\mu_1 \frac{(x + \mu_2)}{r_1^3} + \mu_2 \frac{(x - \mu_1)}{r_2^3} \right] \\ &= \ddot{x} - 2\omega \dot{y} \end{aligned}$$

同様に y でも偏微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_2}{r_1} &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_1 \cdot 2y}{\{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\mu_1 \frac{y}{r_1^3} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_2 \cdot 2y}{\{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\mu_2 \frac{y}{r_2^3} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) \\ &= \omega^2 y - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \\ &= \ddot{y} - 2\omega \dot{x} \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} \\ \ddot{y} - 2\omega \dot{x} = \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

6.

2.5 より

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} \quad (3)$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (4)$$

(3) 式に \dot{x} , (4) 式に \dot{y} を両辺かけて辺々足し合わせると

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{dU}{dt} \end{aligned}$$

時間で積分する。積分定数を C_J と置くと

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + C_J = U$$

よって

$$C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$