

# ITPASS 数値計算実習課題その1

0913429s 中村 望

平成 23 年 7 月 27 日

## 問題 1

1.

慣性系における中心星と惑星の運動方程式は

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2)$$

(1) を  $m_1$  , (2) を  $m_2$  で割り , 2 式の差をとると

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

相対ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  を用いると

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

これは , 位置  $\mathbf{r}_1$  に質量  $m_1 + m_2$  の物体がある場合の運動方程式と同じである.

2.

$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y)$  ,  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  だから , (3) より

$$\dot{v}_x = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x$$

$$\dot{v}_y = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y$$

## 問題 2

1.

2 天体の重心が座標原点なので

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$$

これと  $x_2 - x_1 = 1$  より

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \\ &= -\mu_2 \\ x_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \\ &= \mu_1 \end{aligned}$$

また, 中心星と惑星は  $x$  軸上にあるので

$$y_1 = y_2 = 0$$

2.

時刻  $t = 0$  において  $\theta = 0$  だから

$$\theta = \omega t$$

$$\xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t \quad (4)$$

$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t \quad (5)$$

3.

(4), (5) の両辺を時刻  $t$  で微分すると

$$\dot{\xi} = \dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t - \omega x \sin \omega t - \omega y \cos \omega t \quad (6)$$

$$\dot{\eta} = \dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t + \omega x \cos \omega t - \omega y \sin \omega t \quad (7)$$

もう一度 (6), (7) の両辺を時刻  $t$  で微分すると

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} \cos \omega t - \ddot{y} \sin \omega t - 2\omega \dot{x} \sin \omega t - 2\omega \dot{y} \cos \omega t - \omega^2 x \cos \omega t + \omega^2 y \sin \omega t \quad (8)$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x} \sin \omega t + \ddot{y} \cos \omega t + 2\omega \dot{x} \cos \omega t - 2\omega \dot{y} \sin \omega t - \omega^2 x \sin \omega t - \omega^2 y \cos \omega t \quad (9)$$

4.

慣性座標系  $(\xi, \eta)$  での運動方程式の左辺  $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}$  に (8), (9) を代入する .

(第一式)  $\times \cos \omega t$  + (第二式)  $\times \sin \omega t$  より ,

$$(\text{左辺}) = \ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega x^2$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\mu_1}{r_1^3} [(\xi_1 - \xi) \cos \omega t + (\eta_1 - \eta) \sin \omega t] + \frac{\mu_2}{r_2^3} [(\xi_2 - \xi) \cos \omega t + (\eta_2 - \eta) \sin \omega t]$$

ここで

$$\xi_1 - \xi = (x_1 - x) \cos \omega t - (y_1 - y) \sin \omega t$$

$$= -(x + \mu_2) \cos \omega t + y \sin \omega t$$

$$\eta_1 - \eta = -(x + \mu_2) \sin \omega t - y \cos \omega t$$

$$\xi_2 - \xi = -(x - \mu_1) \cos \omega t + y \sin \omega t$$

$$\eta_2 - \eta = -(x - \mu_1) \sin \omega t - y \cos \omega t$$

これらを代入して整理すると

$$(\text{右辺}) = -[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}]$$

よって

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x = -[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}] \quad (10)$$

同様に ,  $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}$  に (8), (9) を代入して ,

(第一式)  $\times (-\sin \omega t)$  + (第二式)  $\times \cos \omega t$  より

$$(\text{左辺}) = \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\mu_1}{r_1^3} [-(\xi_1 - \xi) \sin \omega t + (\eta_1 - \eta) \cos \omega t] + \frac{\mu_2}{r_2^3} [-(\xi_2 - \xi) \sin \omega t + (\eta_2 - \eta) \cos \omega t]$$

$$= \frac{\mu_1}{r_1^3} (-y) + \frac{\mu_2}{r_2^3} (-y)$$

$$= -[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}]y$$

よって

$$\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y = -[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}]y \quad (11)$$

5.

$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$  より

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x - \frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu_2) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \mu_1) \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - \frac{\mu_1}{r_1^3}y - \frac{\mu_2}{r_2^3}y \quad (13)$$

(12), (13) を (10), (11) に代入して

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (14)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (15)$$

6.

(14) に  $\dot{x}$ , (15) に  $\dot{y}$  をかけて, 2 式を足すと

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

両辺を時刻  $t$  について積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U = C_J \quad (16)$$

$C_J$  は積分定数で, 円制限 3 体問題における保存量ヤコビ定数である.