

数値計算実習課題 1

齊田美香 (joho07)

2011年7月21日

課題 1

問題 1

1.

中心星に成り立つ運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (1)$$

同様に惑星に成り立つ運動方程式は

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2)$$

と表すことができる。またここで、(2) 式から (1) 式を引いて、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ で表される相対ベクトルを用いると

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{r^3}{G(m_1 + m_2)} \mathbf{r} \quad (3)$$

が得られる。

2.

$$\dot{v}_x = \ddot{x} = -G(m_1 + m_2) \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

同様にして

$$\dot{v}_y = \ddot{y} = -G(m_1 + m_2) \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

問題 2

1.

条件より、重心が原点にあり中心星と惑星は x 軸上にあるので、それぞれの x 座標は質量の逆比で表すことができ、重力定数 G は定数であるから μ を用いて

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_2 \\ x_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_1 \end{cases}$$

したがって、

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$$

2.

角速度 ω で回転しているので

$$\theta = \omega t$$

ここで回転行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ を用いると

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、

$$\begin{cases} \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{cases}$$

3.

2. より、 t で一回微分すると

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

もう一回微分すると

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & -\cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

整理すると、

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 x - 2\omega \dot{y} + \ddot{x} \\ -\omega^2 y + 2\omega \dot{x} + \ddot{y} \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = \mathbf{X} \cos \omega t - \mathbf{Y} \sin \omega t & (4) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y = \mathbf{X} \sin \omega t + \mathbf{Y} \cos \omega t & (5) \end{cases}$$

4.

ここで $\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = \mathbf{X}$ 、 $\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y = \mathbf{Y}$ とすると、

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \mathbf{X} \cos \omega t - \mathbf{Y} \sin \omega t & (6) \\ \ddot{\eta} = \mathbf{X} \sin \omega t + \mathbf{Y} \cos \omega t & (7) \end{cases}$$

これと、与式の運動方程式を回転座標系に書き直した以下の式、

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos \omega t + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin \omega t & (8) \\ \ddot{\eta} = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin \omega t + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos \omega t & (9) \end{cases}$$

を用いると、

$$\begin{cases} \mathbf{X} \cos \omega t - \mathbf{Y} \sin \omega t = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos \omega t + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin \omega t & (10) \\ \mathbf{X} \sin \omega t + \mathbf{Y} \cos \omega t = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin \omega t + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos \omega t & (11) \end{cases}$$

(8)、(9) 式において、 $\sin \omega t, \cos \omega t$ について係数を比較すると、

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right] & (12) \\ \mathbf{Y} = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y & (13) \end{cases}$$

となり導出できた。

5.

ポテンシャル U の式は、

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2}} \quad (14)$$

と書き換えることができ、 x, y についての偏微分を行うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x - \left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y - \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y\end{aligned}$$

したがって、粒子 P についての運動方程式は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (15)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (16)$$

と表すことができる。

6.

(13)、(14) 式の両辺にそれぞれ \dot{x}, \dot{y} をかけて足すと

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t}\end{aligned} \quad (17)$$

となる。この式は時間 t で積分できて、

$$U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C_J \quad (18)$$

ここで C_J は円制限 3 体問題におけるヤコビ定数である。

参考文献

[1] ab. cdef