ITPASS 数値計算実習 課題その1

原田竣也 joho 02

平成 23 年 7 月 21 日

問題 1

1.1

万有引力についてのみ考えればよいので，このときの中心星の運動方程式は

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r_1}} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|^3}$$

惑星の運動方程式は

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r_2}} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}$$

と表せる．$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ とし，上の 2 式をまとめると

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r}$$

この式は 2 天体が万有引力のもとで相互作用する運動について記述している．

1.2

1.1 で得られた運動方程式より，

$$\dot{v_x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x$$
$$\dot{v_y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y$$

と表せる．

問題 2

2.1

2 天体の座標はそれぞれ

$$(x_1, y_1) = (-\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, 0), (x_2, y_2) = (\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, 0)$$

である.

$\mu_1 + \mu_2 = 1$ であるから

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0), (x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$$

と表せる.

2.2

θ は角速度 ω を利用して

$$\theta = \omega t$$

と表せる.

回転行列 $\boldsymbol{R}$ は, 次のように表わされる.

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

これより

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ \eta &= x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{aligned}$$

となる.

2.3

2.2 の式を時間について 2 回微分する.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -(\omega x + \dot{y})\sin\omega t + (\dot{x} + \omega y)\cos\omega t \\ \dot{\eta} &= (\dot{x} - \omega y)\sin\omega t + (\omega x + \dot{y})\cos\omega t \end{aligned}$$

であるから

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\omega t - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} + \omega^2 y)\sin\omega t$$
$$\ddot{\eta} = (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\omega t + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\omega t$$

となる．

2.4

2.3 の式は，$t = 0$ において $\sin\omega t = 0, \cos\omega t = 1$ より

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x$$
$$\ddot{\eta} = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y$$

となる．また，2.1 より $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0), (x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$ であることと与式より，上の 2 式は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}]$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}]y$$

と導ける．

2.5

r_1, r_2 はそれぞれ

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2}$$

と表せる．

ここで，U に r_1, r_2 を代入し，x, y についてそれぞれ偏微分する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x - \frac{\mu_1(x + \mu_2)}{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{[(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \omega^2 x - \frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu_2) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \mu_1) \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y - \frac{\mu_1 y}{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2 y}{[(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \omega^2 y - \frac{\mu_1 y}{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2 y}{[(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

となるので，2.4 の式は

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \ddot{x} - 2\omega\dot{y}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \ddot{y} + 2\omega\dot{x}$$

と表せる．

2.6
$\dot{x}, \dot{y}$ を 2.5 の式にそれぞれ掛け合わせる．

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}$$
$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}$$

これらを足し合わせる．

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}$$

これを時間について積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C_J = U$$

となるため，ヤコビ定数 C_J は

$$C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

となる．