数値計算実習課題その1

清水俊平　(joho08)

2011 年 7 月 1 日 (金) 出題分

1　問題 1 の解答

問 1

中心星、惑星の質量をそれぞれ m_1,m_2、位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$ とする。

万有引力の法則は

$$F = -\frac{GmM}{r^2}$$

であるためこれを用いると、

中心星における運動方程式は

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{1}$$

となる。

惑星における運動方程式は

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \tag{2}$$

となる。

(1) 式の両辺を m_1 で割ると

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{3}$$

となる。また、(2) 式の両辺を m_2 で割ると

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \tag{4}$$

ここで

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 \tag{5}$$

と相対ベクトル $\mathbf{r}$ を定義する。

(5) 式の両辺を t に関して 2 階微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ &= \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}\end{aligned} \tag{6}$$

となるので、ここで (6) 式に (3) 式と (4) 式をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}\end{aligned} \tag{7}$$

となる。

この導出された (7) 式より、2 天体がケプラー運動していることが分かる。

問 2

(7) 式の運動方程式を成分に分けることを考える。

ここで

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_x, v_y) \\ \mathbf{r} &= (x, y) \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

であるので、(7) 式より

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{8}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{9}$$

となる。

2　問題2の解答

問1

惑星と中心星は常にx軸上にあるので

$$y_1 = y_2 = 0 \tag{10}$$

となる。

ここで、粒子と中心星および惑星との距離をそれぞれ r_1,r_2 とすると

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。(中心星と惑星との距離は1とする)

ここで、$\mu_1 + \mu_2 = 1$ なので (11),(12) 式に代入すると

$$x_1 = -\mu_2 \tag{13}$$

$$x_2 = \mu_1 \tag{14}$$

以上、(10),(13),(14) 式より

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \tag{15}$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0) \tag{16}$$

問2

角速度が ω なので、ξ 軸とx軸のなす角度 θ は

$$\theta = \omega t \tag{17}$$

また、回転による座標変換なので

$$\begin{aligned} \xi &= xcos\theta - ysin\theta \\ &= xcos\omega t - ysin\omega t \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \eta &= xsin\theta + ycos\theta \\ &= xsin\omega t + ycos\omega t \end{aligned} \tag{19}$$

となる。

問 3

(18),(19) 式をそれぞれ時間で二階微分する。

$$\dot{\xi} = \dot{x}cos\omega t - \omega x sin\omega t - \dot{y}sin\omega t - \omega y cos\omega t$$

$$\dot{\eta} = \dot{x}sin\omega t + \omega x cos\omega t + \dot{y}cos\omega t - \omega y sin\omega t$$

よって

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}cos\omega t - \ddot{y}sin\omega t - 2\omega\dot{x}sin\omega t - 2\omega\dot{y}cos\omega t - \omega^2 x cos\omega t + \omega^2 y sin\omega t \quad (20)$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x}sin\omega t + \ddot{y}sin\omega t + 2\omega\dot{x}cos\omega t - 2\omega\dot{y}sin\omega t - \omega^2 x sin\omega t - \omega^2 y cos\omega t \quad (21)$$

となる。

問 4

式 (20),(21) より

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)cos\omega t - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)sin\omega t \quad (22)$$

$$\ddot{\eta} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)sin\omega t + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)cos\omega t \quad (23)$$

となる。

また、(18),(19) 式と (15),(16) 式の結果より

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 cos\omega t - y_1 sin\omega t \\ &= -\mu_2 cos\omega t \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= x_2 cos\omega t - y_2 sin\omega t \\ &= \mu_1 cos\omega t \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 sin\omega t + y_1 cos\omega t \\ &= -\mu_2 sin\omega t \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= x_2 sin\omega t + y_2 cos\omega t \\ &= \mu_1 sin\omega t \end{aligned} \quad (27)$$

となる。

ここで、(22)〜(27) 式と与式より

$$\ddot{\xi} = -(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3})cos\omega t + (\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3})y sin\omega t \quad (28)$$

$$\ddot{\eta} = -(\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}) sin\omega t - (\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}) ycos\omega t \tag{29}$$

となる。

よって、この (28),(29) 式と (22),(23) 式を比較すると

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -(\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}) \tag{30}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = (\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}) y \tag{31}$$

が導かれる。

問 5

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2}$$

なので、ポテンシャル U の式は

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x+\mu_2)^2+y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1-x)^2+y^2}} \tag{32}$$

となる。

ここで、x,y についての偏微分をそれぞれ考えると

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x - (\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}) \tag{33}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - (\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}) y \tag{34}$$

となるので、粒子 P についての運動方程式は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{35}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{36}$$

と表わされる。

問 6

(35) の両辺に $\dot{x}$、(36) の両辺に $\dot{y}$ をそれぞれかける。

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{37}$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{38}$$

ここで、(37)+(38) をすると

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \tag{39}$$

となる。

この (39) 式を時間 t について積分すると

$$U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C_J \tag{40}$$

ここで、C_J は積分定数であり、円制限三体問題の保存量であるヤコビ定数となっている。(C_J は負の符号も含めて定数としている)