数値計算実習課題その1

山根史弥　(joho11)

2011/7/1(金) 出題分

1　問題1

1

中心星、惑星の質量をそれぞれ m_1,m_2、位置ベクトルを $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$ とおく。

万有引力の法則

$$F = -\frac{GmM}{r^2}$$

を用いると、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式はそれぞれ

$$m_1\ddot{\mathbf{r}_1} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}_2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{2}$$

となる。

(1) 式の両辺を m_1 で割ると

$$\ddot{\mathbf{r}_1} = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{3}$$

また、(2) 式の両辺を m_2 で割ると

$$\ddot{\mathbf{r}_2} = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{4}$$

ここで

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{5}$$

と相対ベクトル $\mathbf{r}$ を定義し、両辺を t に関して 2 階微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}_2} - \ddot{\mathbf{r}_1} \tag{6}$$

となるので、(3) 式と (4) 式を (6) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。

（7）式は、中心星から見た惑星の円運動を表している。

2

(7) 式の運動方程式を成分に分けることを考える。簡単のため、2 体は同一平面上を運動しているとする。

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x, y) \\ \mathbf{v} &= (v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y}) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

とすると (7) 式より

$$\dot{v_x} = \ddot{x} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \tag{8}$$

$$\dot{v_y} = \ddot{y} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y \tag{9}$$

と表される。

2　問題2

1

惑星と中心星は常に x 軸上にあるので

$$y_1 = y_2 = 0 \tag{10}$$

回転系での中心星、惑星の x 座標をそれぞれ x_1,x_2 とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。(中心星と惑星との距離は 1 とする)

$\mu_1 + \mu_2 = 1$ であるから

$$x_1 = -\mu_2 \tag{13}$$

$$x_2 = \mu_1 \tag{14}$$

したがって

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \tag{15}$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0) \tag{16}$$

2

角速度が ω なので、ξ 軸と x 軸のなす角度 θ は

$$\theta = \omega t \tag{17}$$

したがって

$$\begin{aligned} \xi &= xcos\theta - ysin\theta \\ &= xcos\omega t - ysin\omega t \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \eta &= xsin\theta + ycos\theta \\ &= xsin\omega t + ycos\omega t \end{aligned} \tag{19}$$

と表される。

3
(18),(19) 式をそれぞれ時間で 2 階微分する。

$$\dot{\xi} = \dot{x}cos\omega t - \omega x sin\omega t - \dot{y}sin\omega t - \omega y cos\omega t$$

$$\dot{\eta} = \dot{x}sin\omega t + \omega x cos\omega t + \dot{y}cos\omega t - \omega y sin\omega t$$

なので

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}cos\omega t - \ddot{y}sin\omega t - 2\omega\dot{x}sin\omega t - 2\omega\dot{y}cos\omega t - \omega^2 x cos\omega t + \omega^2 y sin\omega t \quad (20)$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x}sin\omega t + \ddot{y}cos\omega t + 2\omega\dot{x}cos\omega t - 2\omega\dot{y}sin\omega t - \omega^2 x sin\omega t - \omega^2 y cos\omega t \quad (21)$$

となる。

4
(20),(21) 式より

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}cos\omega t + \ddot{\eta}sin\omega t &= \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x & (22) \\ -\ddot{\xi}sin\omega t + \ddot{\eta}cos\omega t &= \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y & (23) \end{aligned}$$

が成り立つ。
また、(18),(19) 式より

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 cos\omega t - y_1 sin\omega t \\ \xi_2 &= x_2 cos\omega t - y_2 sin\omega t \\ \eta_1 &= x_1 sin\omega t + y_1 cos\omega t \\ \eta_2 &= x_2 sin\omega t + y_2 cos\omega t \end{aligned}$$

(15),(16) 式より

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\mu_2 cos\omega t & (24) \\ \xi_2 &= \mu_1 cos\omega t & (25) \\ \eta_1 &= -\mu_2 sin\omega t & (26) \\ \eta_2 &= \mu_1 sin\omega t & (27) \end{aligned}$$

となる。
したがって、(22),(23) 式に、与式と (18),(19),(24)～(27) 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= -\left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right] & (28) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y & (29) \end{aligned}$$

が得られる。

5

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\mu_1)^2 + y^2}$$

であるから、力のポテンシャルは

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x+\mu_2)^2+y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(x-\mu_1)^2+y^2}} \tag{30}$$

となる。

ここで、x,y について偏微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x - (\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}) \tag{31}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - (\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3})y \tag{32}$$

となるので、粒子 P についての運動方程式は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{33}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{34}$$

と表わされる。

6

(33) の両辺に $\dot{x}$、(34) の両辺に $\dot{y}$ をそれぞれかける。

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{35}$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{36}$$

(35) 式と (36) 式を足し合わせると

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dU}{dt} \end{aligned} \tag{37}$$

となる。

(37) 式を時間 t について積分すると

$$U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C_J \tag{38}$$

ここで、積分定数 C_J は円制限三体問題における保存量であり、ヤコビ定数と呼ばれる。