

数値計算実習課題その1

山根史弥 (joho11)

2011/7/1(金) 出題分

1 問題 1

1

中心星、惑星の質量をそれぞれ m_1, m_2 、位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とおく。

万有引力の法則

$$F = -\frac{GmM}{r^2}$$

を用いると、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式はそれぞれ

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2)$$

となる。

(1) 式の両辺を m_1 で割ると

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3)$$

また、(2) 式の両辺を m_2 で割ると

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (4)$$

ここで

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (5)$$

と相対ベクトル \mathbf{r} を定義し、両辺を t に関して 2 階微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (6)$$

となるので、(3) 式と (4) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (7)$$

となり、2体がケプラー運動をしていることが分かる。

2

(7)式の運動方程式を成分に分けることを考える。簡単のため、2体は同一平面上を運動しているとする。

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x, y) \\ \mathbf{v} &= (v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y}) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

とすると(7)式より

$$\dot{v}_x = \ddot{x} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x \quad (8)$$

$$\dot{v}_y = \ddot{y} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y \quad (9)$$

と表される。

2 問題 2

1

惑星と中心星は常に x 軸上にあるので

$$y_1 = y_2 = 0 \quad (10)$$

粒子と中心星および惑星との距離をそれぞれ r_1, r_2 とすると

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。(中心星と惑星との距離は 1 とする)

$\mu_1 + \mu_2 = 1$ であるから

$$x_1 = -\mu_2 \quad (13)$$

$$x_2 = \mu_1 \quad (14)$$

したがって

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \quad (15)$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0) \quad (16)$$

2

角速度が ω なので、 ξ 軸と x 軸のなす角度 θ は

$$\theta = \omega t \quad (17)$$

したがって

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ &= x \cos \omega t - y \sin \omega t \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \eta &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ &= x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{aligned} \quad (19)$$

と表される。

3

(18),(19) 式をそれぞれ時間で 2 階微分する。

$$\dot{\xi} = \dot{x}\cos\omega t - \omega x\sin\omega t - \dot{y}\sin\omega t - \omega y\cos\omega t$$

$$\dot{\eta} = \dot{x}\sin\omega t + \omega x\cos\omega t + \dot{y}\cos\omega t - \omega y\sin\omega t$$

なので

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}\cos\omega t - \dot{y}\sin\omega t - 2\omega\dot{x}\sin\omega t - 2\omega\dot{y}\cos\omega t - \omega^2 x\cos\omega t + \omega^2 y\sin\omega t \quad (20)$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x}\sin\omega t + \dot{y}\cos\omega t + 2\omega\dot{x}\cos\omega t - 2\omega\dot{y}\sin\omega t - \omega^2 x\sin\omega t - \omega^2 y\cos\omega t \quad (21)$$

となる。

4

(20),(21) 式より

$$\ddot{\xi}\cos\omega t + \dot{\eta}\sin\omega t = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \quad (22)$$

$$-\ddot{\xi}\sin\omega t + \dot{\eta}\cos\omega t = \dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \quad (23)$$

が成り立つ。

また、(15),(16),(18),(19) 式より

$$\xi_1 = -\mu_2\cos\omega t \quad (24)$$

$$\xi_2 = \mu_1\cos\omega t \quad (25)$$

$$\eta_1 = -\mu_2\sin\omega t \quad (26)$$

$$\eta_2 = \mu_1\sin\omega t \quad (27)$$

となる。

したがって、(22),(23) 式に、与式と (18),(19),(24) ~ (27) 式を代入して整理すると

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -\left(\mu_1\frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right) \quad (28)$$

$$\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y \quad (29)$$

が得られる。

5

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2}$$

であるから、力のポテンシャルは

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2}} \quad (30)$$

となる。

ここで、 x, y について偏微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x - \left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \quad (31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \quad (32)$$

となるので、粒子 P についての運動方程式は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (33)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (34)$$

と表わされる。

6

(33) の両辺に \dot{x} 、(34) の両辺に \dot{y} をそれぞれかける。

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (35)$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (36)$$

(35) 式と (36) 式を足し合わせると

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。

(37) 式を時間 t について積分すると

$$U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C_J \quad (38)$$

ここで、積分定数 C_J は円制限三体問題における保存量であり、ヤコビ定数と呼ばれる。